

Teorema 1 $\forall \lambda \in \text{Spec}(A) \quad 1 \leq m_\lambda(\lambda) \leq m_\lambda(\lambda) \leq n$

Teorema 2 La somma degli autoespazi di una matrice associata ad autovalori differenti è diretta.

Teorema: A diagonalizzabile $\Leftrightarrow$ esiste una base di autovettori per K^n

$\Downarrow$
Cor. 1 A diagonalizzabile $\Leftrightarrow \bigoplus_{\lambda \in \text{Spec}(A)} V_\lambda = K^n$

$\Leftrightarrow \bigoplus_{\lambda \in \text{Spec}(A)} V_\lambda = K^n$

$\Leftrightarrow \sum_{\lambda \in \text{Spec}(A)} \dim V_\lambda = n \quad \Leftrightarrow \sum_{\lambda \in \text{Spec}(A)} m_\lambda(\lambda) = n$

Cor. 2 A diagonalizzabile $\Leftrightarrow \sum_{\lambda \in \text{Spec}(A)} m_\lambda(\lambda) = n$ & $m_\lambda(\lambda) = m_\lambda(\lambda) \quad \forall \lambda \in \text{Spec}(A)$.

DIM Teorema 1: $\lambda \in \text{Spec}(A) \Rightarrow \det(A - \lambda I) = 0$
 $\Rightarrow \text{rk}(A - \lambda I) \leq n-1 \Rightarrow \dim \ker(A - \lambda I) \geq 1$
 $\Rightarrow m_g(\lambda) \geq 1$.

DIMOSTRIAMO CHE $m_a(\lambda) \geq m_g(\lambda)$

Sia A una matrice $\lambda \in \text{Spec}(A)$ e $m_g(\lambda) = t$
 $\Rightarrow \dim V_\lambda = t \Rightarrow \exists t$ autovettori linearmente
indipendenti in $\mathbb{K}^n$. Chiamiamoli
 $B'_2 := (\bar{e}'_1 \dots \bar{e}'_t)$.
Completiamo B'_2 a base di $\mathbb{K}^n$ aggiungendo $n-t$
vettori: $B'_3 = (\bar{e}'_1 \dots \bar{e}'_t, \bar{e}''_{t+1} \dots \bar{e}''_n)$

$$A \bar{e}'_i = \lambda \bar{e}'_i \quad \dots \quad A \bar{e}''_i = \lambda \bar{e}''_i$$

P = matrice che ha come colonne i
vettori $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_t, \vec{e}_{t+1}, \dots, \vec{e}_n$

$$AP = P \left[\begin{array}{c|c} \lambda & 0 \\ \hline 0 & \lambda \\ \hline 0 & R \end{array} \right]_t$$

$$= (\vec{Ae}_1, \dots, \vec{Ae}_t, \vec{Ae}_{t+1}, \dots)$$

questa matrice
è simile ad A

$$P^{-1}AP = \left[\begin{array}{c|c} \lambda & 0 \\ \hline 0 & \lambda \\ \hline 0 & R \end{array} \right]$$

matrici simili hanno lo stesso polinomio caratteristico.

$$p(x) = \det[P^*AP - xI] = \det \left[\begin{array}{c|c} \overset{0}{x-x} & \overset{0}{0} \\ \hline 0 & R-xI \end{array} \right] =$$

$$= (x-x)^t \det(R-xI).$$

$\Rightarrow p(x)$ ammette $x=x$ come radice almeno t volte.

$$\Rightarrow m_a(x) \geq t = m_g(x).$$

□

oss: Il polinomio caratteristico $p_A(x) = \det(A - xI)$ è un polinomio di grado n in $x \Rightarrow \sum_{\lambda \in \text{Spec}(A)} m_a(\lambda) \leq n$

perché un polinomio di grado n ha al più n radici.

N.B. Se $\sum_{\lambda \in \text{Spec}(A)} m_\lambda(\lambda) < n \Rightarrow$ la matrice A sicuramente non è diagonalizzabile!

A $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ è diagonalizzabile?

DIPENDE DAL CAMPO!

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1$$

se $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \Rightarrow A$ non è diagonalizzabile.

$$\text{Spec}_{\mathbb{R}}(A) = \emptyset.$$

se $A \in \mathbb{C}^{2 \times 2} \Rightarrow \text{Spec}_{\mathbb{C}}(A) = \{-i, +i\}$ ed A

è diagonalizzabile perché $m_{\pm i}(\pm i) = m_{\pm i}(\pm i) = 1$

$$V_{-i} := \ker \begin{bmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{bmatrix} = \mathcal{L} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} \right) \leq \mathbb{C}^2$$

$$ix + y = 0 \quad y = -ix$$

$$-ix + iy = 0$$

$$V_i = \ker \begin{bmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{bmatrix} = \mathcal{L} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} \right) \leq \mathbb{C}^2$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{bmatrix}$$

oss: Se K è algebricamente chiuso (e.g. $K = \mathbb{C}$)
 $\Rightarrow \forall A \in K^{n,n}$, la somma delle molteplicità
 algebriche degli autovalori di A è n .

Dim. Teorema 2 (^{la} somma degli autospazi è diretta).

• Per induzione su $\lambda =$ numero di autospazi.

$\lambda = 2$: Siano λ, μ due autovalori di A , $\lambda \neq \mu$

e supponiamo

$$X \in V_\lambda \cap V_\mu$$

$$\Rightarrow AX = \lambda X \quad \text{ed} \quad AX = \mu X$$

$$\Rightarrow \underline{0} = AX - AX = (\lambda - \mu)X \Rightarrow$$

$\lambda - \mu = 0$ impossibile
perché per ipotesi
 $\lambda \neq \mu$

oppure $X = \underline{0}$.

$$\Rightarrow V_\lambda \cap V_\mu = \{ \underline{0} \} \Rightarrow V_\lambda \oplus V_\mu.$$

$(S-1) \Rightarrow S$.

Tutte le somme di $(S-1)$ autospazi sono dirette
 $\Rightarrow$ tutte le somme di S autospazi sono dirette.

Siano $\mathcal{L}_1 \dots \mathcal{L}_S$ S autovettori differenti e
consideriamo

$$W = V_{\mathcal{L}_1} + V_{\mathcal{L}_2} + \dots + V_{\mathcal{L}_S}$$

abbiamo dimostrato che ogni vettore di W si scrive
in modo unico come somma di vettori di
 $V_{\mathcal{L}_1} + \dots + V_{\mathcal{L}_S}$.

per assurdo: sia $\bar{w} = \bar{v}_1 + \bar{v}_2 + \dots + \bar{v}_S =$
 $= \bar{v}'_1 + \bar{v}'_2 + \dots + \bar{v}'_S$ con $\bar{v}_i, \bar{v}'_i \in V_{\mathcal{L}_i}$

Il vettore $A\bar{w}$ è uguale a

$$\begin{aligned} A\bar{w} &= A\bar{v}_2 + A\bar{v}_3 + \dots + A\bar{v}_s = \lambda_2 \bar{v}_2 + \lambda_3 \bar{v}_3 + \dots + \lambda_s \bar{v}_s \\ &= A\bar{v}_2' + A\bar{v}_3' + \dots + A\bar{v}_s' = \lambda_2 \bar{v}_2' + \lambda_3 \bar{v}_3' + \dots + \lambda_s \bar{v}_s' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda_1 \bar{w} &= \lambda_1 \bar{v}_2 + \lambda_1 \bar{v}_3 + \dots + \lambda_1 \bar{v}_s = \\ &= \lambda_1 \bar{v}_1' + \lambda_1 \bar{v}_2' + \dots + \lambda_1 \bar{v}_s' \end{aligned}$$

$$W \ni A\bar{w} - \lambda_1 \bar{w} = (\lambda_2 - \lambda_1) \bar{v}_2 + (\lambda_3 - \lambda_1) \bar{v}_3 + \dots + (\lambda_s - \lambda_1) \bar{v}_s$$

$$\in V_{\lambda_2} + V_{\lambda_3} + \dots + V_{\lambda_s} \quad (s-1) \text{ autospazi.}$$

$$= (\lambda_2 - \lambda_1) \bar{v}_2' + (\lambda_3 - \lambda_1) \bar{v}_3' + \dots + (\lambda_s - \lambda_1) \bar{v}_s'$$

$$\begin{aligned} (\lambda_2 - \lambda_1) \bar{v}_2 &= (\lambda_2 - \lambda_1) \bar{v}_2' & \lambda_2 - \lambda_1 \neq 0 \\ \vdots & \vdots & \\ (\lambda_s - \lambda_1) \bar{v}_s &= (\lambda_s - \lambda_1) \bar{v}_s' & \lambda_s - \lambda_1 \neq 0 \end{aligned} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{V}_2 = \bar{V}'_2 \quad \bar{V}_3 = \bar{V}'_3 \quad \dots \quad \bar{V}_s = \bar{V}'_s$$

$$\begin{aligned} \bar{\omega} &= \boxed{\bar{V}_1 + \bar{V}'_2 + \bar{V}_3 + \dots + \bar{V}_s} = \\ &= \bar{V}'_1 + \bar{V}'_2 + \bar{V}'_3 + \dots + \bar{V}'_s = \\ &= \boxed{\bar{V}'_1 + \bar{V}_2 + \dots + \bar{V}_s} \Rightarrow \bar{V}'_1 = \bar{V}_1 \end{aligned}$$

$$0 = \bar{\omega} - \bar{\omega} = \bar{V}_2 - \bar{V}'_2$$

quindi $\bar{\omega}$ ci serve in modo unico

$\Rightarrow$ la somma $V_{x1} \oplus V_{x2} \oplus \dots \oplus V_{xs}$ è diretta. $\square$

N.B. esistono matrici che non sono diagonalizzabili
numerano su 8 !

con 2 to

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = (1 - \lambda)^2 \Rightarrow \text{Spec}_A = \{1, 1\} = \{1, 1\}.$$

$$m_A(1) = 2$$

$$\text{rk}(A - \lambda I) = \text{rk}(A - I) = \text{rk} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 1 \neq 0$$

$$\Rightarrow m_g(1) = 2 - 1 = 1$$

A non diagonalizzabile $\swarrow$ alcuni autovalori $\notin \mathbb{K}$
per qualche autvalore $m_A(\lambda) \neq m_g(\lambda)$.

$\downarrow$
forme canoniche

(forma canonica di Jordan).

$$\begin{bmatrix} \Sigma_{t_1}(x) & & \\ & \ddots & \\ & & \Sigma_{t_n}(x) \end{bmatrix} \quad t_i \quad J_{t_i}(x) := \begin{bmatrix} x & 1 & 0 & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & x \\ 0 & & & x \end{bmatrix} \quad t_i$$

$$\det(\Sigma_{t_i}^{(n)} - xI) = (x - x)^{t_i} \quad m_a(x) = t_i$$

$$rk(\Sigma_{t_i}^{(n)}(x) - xI) = rk \begin{bmatrix} x & 1 & 0 & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & x \\ 0 & & & x \end{bmatrix} = t_i - 1$$

$$m_g(x) = 1$$

MATRICE $M \in \mathbb{R}^{4,4}$ con 1 di moltiplicità algebrica
4 e geometrica 2.

$$A_1 = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 0 & & & \end{array} \right]$$

$A_1 =$

2 blocchi

$$d_1 m_3 = 1$$

$$\det(A_1 - \lambda I) = (1 - \lambda)^4$$

$$\text{rk}(A_1 - I) = \text{rk} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 2$$

$$A_2 = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$A_2 =$

$$\text{rk}(A_2 - I) = \text{rk} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$4 = 3 + 1 = 2 + 2$$

Successione di Fibonacci.

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = 1 \\ a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \end{cases}$$

Definita per
n ≥ 1 ricorsione.

$$\begin{bmatrix} a_i \\ a_{i+1} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} a_{i+1} \\ a_{i+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{i+1} \\ a_i + a_{i+1} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ x+y \end{bmatrix}$$

$$A^n \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{bmatrix}$$

$$\text{Se } \hat{A} \text{ é diagonal} \Rightarrow \hat{A} = \begin{bmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\hat{A}^n = \begin{bmatrix} d_1^n & 0 \\ 0 & d_2^n \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 1$$

$$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$\Rightarrow$ existe uma matriz P tal que

$$P^{-1}DP = A$$

$$A^n = (P^{-1}DP)^n = P^{-1}D^nP = P^{-1} \begin{bmatrix} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \end{bmatrix} P$$

$$A^n \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = P^{-1} \begin{bmatrix} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \end{bmatrix} P \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

~~$$A^n \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = P^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{\sqrt{5}-1}{2} & \frac{\sqrt{5}+1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$~~

Teorema spettrale: Sia $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ con $A = A^T$
Allora tutti gli autovalori di A sono
reali.

Teorema della base spettrale: Una matrice $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ è
ortogonalmente diagonalizzabile $\Leftrightarrow A = A^T$.

Conseguenze: Sia $\cdot : V_n(\mathbb{R}) \times V_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ un prodotto
scalare. Allora esiste una base rispetto
alla " $\cdot$ " la cui matrice è diagonale.
Inoltre si può prendere tale base di modo
che le uniche entrate $\neq 0$ siano $+1$ e -1 .

• $V_n(\mathbb{R}) \times V_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$.

Si chiama B base "a caso" $\Rightarrow$ • ha
matrice A rispetto a B ed $A \in \mathbb{R}^{n,n}$
e ${}^t A = A$.

per il teorema della base spettrale $\exists P$ con $P \in GL(n, \mathbb{R})$

e $P^{-1} = {}^t P$ tale che

$$\underline{P^{-1} A P = D} \text{ con } D$$

matrice diagonale che contiene gli autovalori di A

$\rightarrow$ ma $\underline{P^{-1} = {}^t P} \Rightarrow \underline{{}^t P A P = D} \Rightarrow D$ è la matrice del

prodotto scalare "•" rispetto la base della colonna di P .

Quindi "•" ammette una base rispetto cui la sua matrice
è diagonale.

per i prodotti scalari, noi possiamo sempre normalizzare i vettori di una base con norma $\neq 0$, dividendoli per un quadrato.

Se rispetto a $P = [\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n]$ la matrice del prod. scalare è
$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

possiamo sempre passare ad una base P''

ove dividiamo ogni vettore $\bar{e}_i$ con $\bar{e}_i \cdot \bar{e}_i \neq 0$

per $\sqrt{|\bar{e}_i \cdot \bar{e}_i|} \Rightarrow$ rispetto la nuova base le entrate sulla diag. della matrice

D" che rappresenta "." ordinano solo

$$+1 \quad \text{se} \quad \bar{e}_i' \cdot \bar{e}_i' \neq 0 \quad = \alpha_i$$

$$-1 \quad \text{se} \quad \bar{e}_i' \cdot \bar{e}_i' < 0 \quad = \alpha_i$$

$$0 \quad \text{se} \quad \bar{e}_i' \cdot \bar{e}_i' = 0.$$

Def: Si dice segnatura di un prod. scalare
la sequenza non ordinata dei segni degli
autovalori della matrice che lo rappresenta
rispetto una base

la segnatura classifica i prodotti scalari.

$$n=3$$

$\begin{bmatrix} (+ + +) \\ (- - -) \end{bmatrix} \rightarrow \text{prod. scalare def. positivo}$
 $\rightarrow \text{prod. scalare def. negativo.}$

$\begin{bmatrix} (+ + -) \\ (+ - -) \end{bmatrix} > \text{prod. scalari non degeneri}$
 $(\text{rk } A = \text{rk } D = 3).$

$\begin{bmatrix} (+ + 0) \\ (- - 0) \\ (+ - 0) \end{bmatrix} > \text{prod. scalari degeneri con}$
 $\text{rk. di dim} = 1$

$\begin{bmatrix} (+ 0 0) \\ (- 0 0) \end{bmatrix} > \text{prod. scalari degeneri con}$
 $\text{rk. di dim} = 2.$

$\begin{bmatrix} (0 0 0) \end{bmatrix} \text{ prod. banale.}$

$\mathbb{R}^4$

$(++++)$ definite positive

$(+++-)$ $>$ prod. scalar zero
 $(--++)$ $<$ in relativists.

$$(x_1 \ x_2 \ x_3 \ t) \quad \begin{pmatrix} x_1 x_1 + x_2 x_2 + x_3 x_3 - t^2 \\ 2x_1 t - 2x_2 x_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ \hline 0 & 2 & 2 \end{array} \right]$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$